

Математическое моделирование процесса вакуумной сушки сахара

Д.А. КАЗАРЦЕВ, канд. техн. наук, доцент (e-mail: kda_79@mail.ru)¹

А.А. СЛАВЯНСКИЙ, д-р техн. наук, профессор (e-mail: mgutu-sahar@mail.ru)¹

В.А. ЕРМОЛАЕВ, д-р техн. наук, профессор (e-mail: ermolaevvla@rambler.ru)²

Н.Н. ЛЕБЕДЕВА, канд. техн. наук, доцент (e-mail: n.lebedeva@mgutm.ru)¹

Д.П. МИТРОШИНА, аспирант (e-mail: d_mitr96@mail.ru)¹

¹ФГБОУ ВО «Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского (ПКУ)»

²ФГБОУ ВО «Кузбасская государственная сельскохозяйственная академия»

Введение

В свете современных представлений о продовольственной безопасности особое значение приобретает производство продуктов питания высокого качества. Сахар является стратегически важным продуктом, ценнейшим источником энергии для обеспечения жизнедеятельности человека. Помимо того, что кристаллический сахар — один из непосредственных компонентов пищевого рациона человека, он также применяется в качестве сырья для целого ряда отраслей пищевой и фармацевтической промышленности. Поэтому от качества продукции сахарного производства зависит выпуск кондитерских и хлебобулочных изделий, молочных продуктов, детского питания и др. [2–4]. В России на 1 января 2022 г. было получено 5,55 млн т белого сахара.

Согласно ГОСТ 33222-2015 «Сахар белый. Технические условия» [5] массовая доля влаги в готовом продукте в зависимости от категории колеблется от 0,1 до 0,15 % (см. табл.). При производстве влажность сахара, выходящего из центрифуг, составляет 1,5 %, что в 15 раз выше требуемого ГОСТом значения. Поэтому вопросы, связанные с разработкой интенсивных способов сушки сахара и ресурсосберегающих конструкций сушильных аппаратов, являются актуальными.

Повышение эффективности оборудования для сушки сахара представляет собой комплексную задачу. С одной стороны, современная сушильная техника должна обеспечивать высокую производительность, с другой — низкие энергозатраты на процесс. При этом обязательным условием выступает сохранение высокого качества готового продукта.

Однако создание высокоинтенсивных ресурсосберегающих сушильных установок для сахара невозможно без дальнейшего развития научно-практических основ кинетики процессов его сушки. Теории тепломассобмена, на которых основаны известные способы сушки сахара, как и известные теории и методы моделирования процессов сушки и расчёта сушильных установок, не позволяют прогнозировать сушильный процесс с требуемой достоверностью. По нашему мнению, рассмотрение сушки сахара на основе законов химической кинетики гетерогенных процессов повысит точность и надёжность прогнозирования кинетических характеристик этого процесса, что значительно сократит сроки и средства, запланированные на создание новой сушильной техники.

В связи с вышеизложенным целью данной работы является построение математической модели процесса вакуумной сушки сахара на основе законов химической кинетики гетерогенных процессов.

Материалы и методы исследования

Теоретико-методологическая база исследования основана на трудах отечественных и зарубежных специалистов в области теории и техники сушки, в частности на работах А.В. Лыкова, П.А. Ребиндера, К.Г. Филоненко, А.С. Гинзбурга, В.В. Красникова, В.М. Арапова.

В качестве объекта исследования была принята кинетика вакуумной сушки сахара, приведённая в работе [1]. Исходный сахар влажностью 1,2 % подвергался сушке в вакуумной установке, снабжённой инфракрасными нагревателями с регулируемой мощностью. Равномерность сушки сахара достигалась непрерывным перемешиванием массы лопастной мешалкой. Для создания необходимого разрежения в камере использовался вакуум-насос. Опыты по вакуумной сушке сахара проводили в интервале температур нагрева от 30 до 60 °С с шагом в 10 °С [11–13]. Графики вакуумной сушки сахара [1] были уточнены исходя из пересчёта влажности на массу сухого мате-

Влажность кристаллического белого сахара по ГОСТ 33222-2015

Наименование показателя	Значение по категориям кристаллического белого сахара			
	«Экстра»	TC1	TC2	TC3
Массовая доля влаги кристаллического сахара, %, не более	0,10	0,10	0,12	0,15

риала. При этом время выхода установки на рабочий режим по давлению (~5 мин) не учитывалось. Полученные графические зависимости кинетики вакуумной сушки сахара и температурные кривые этого процесса представлены на рис. 1 и 2.

Для разработки математической модели вакуумной сушки сахара использовался физико-химический подход, основанный на представлении сушки как квазитопохимической гетерогенной реакции, в которой в результате физико-химических и фазовых превращений из исходного продукта образуется сухой остаток и парообразная фаза, переходящая в сушильный агент. Такое представление сушки позволяет применить к математическому моделированию законы кинетики топахимических реакций гетерогенных процессов, прежде всего два фундаментальных положения формальной химической кинетики: закон действующих масс и кинетическое уравнение Аррениуса [6, 7].

С помощью уравнения Аррениуса определяем величину константы скорости реакции k , имеющую вид

$$k = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (1)$$

где A – предэкспоненциальный множитель, зависящий от физико-химических свойств реакционной системы; E – энергия активации, Дж/моль; T – абсолютная температура реакции, К; R – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К).

Результаты и обсуждение

При разработке общего вида математической модели кинетики вакуумной сушки сахара были приняты следующие допущения. Начальное влагосодержание сахара достаточно низкое и не превышает $1,2 \text{ кг}_{\text{вл}}/\text{кг}_{\text{с.вещ}}$, исключает избыток свободной по-

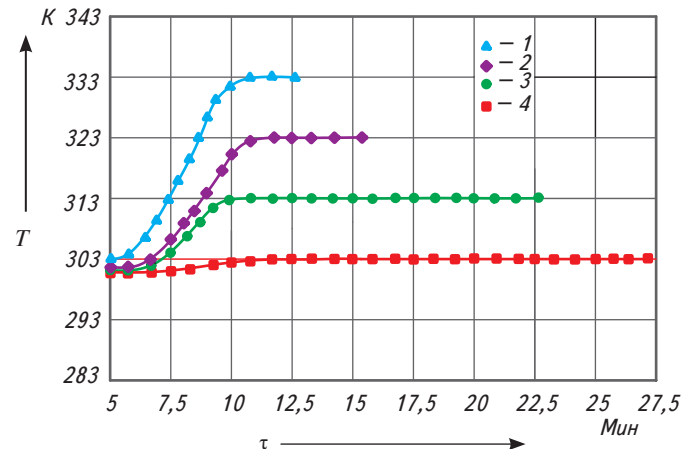


Рис. 2. Температурные кривые вакуумной сушки сахара: 1 – $T = 333 \text{ K}$; 2 – $T = 323 \text{ K}$; 3 – $T = 313 \text{ K}$; 4 – $T = 303 \text{ K}$

верхностной влаги. Анализ сорбционных свойств [6], фракционного состава и видов влаги в сахаре позволяет полагать, что очередность удаления водных фракций из продукта будет определяться в соответствии с ростом энергии связи, которую находим по уравнению

$$\varphi(U, T) = \exp\left[-\frac{A_\varphi}{RT} \cdot \exp(-B_\varphi \cdot U)\right], \quad (2)$$

где A_φ , B_φ – эмпирические коэффициенты; R – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К); T – температура окружающего воздуха, К; U – влагосодержание материала, $\text{кг}_{\text{вл}}/\text{кг}_{\text{с.вещ}}$ [9].

При вычислении площади поверхности сушки полагаем, что кристаллы сахара имеют неправильную форму, однако это значительно усложняет расчёт. Для упрощения расчёта согласно теории эквивалентной сферы принимаем допущение, в соответствии

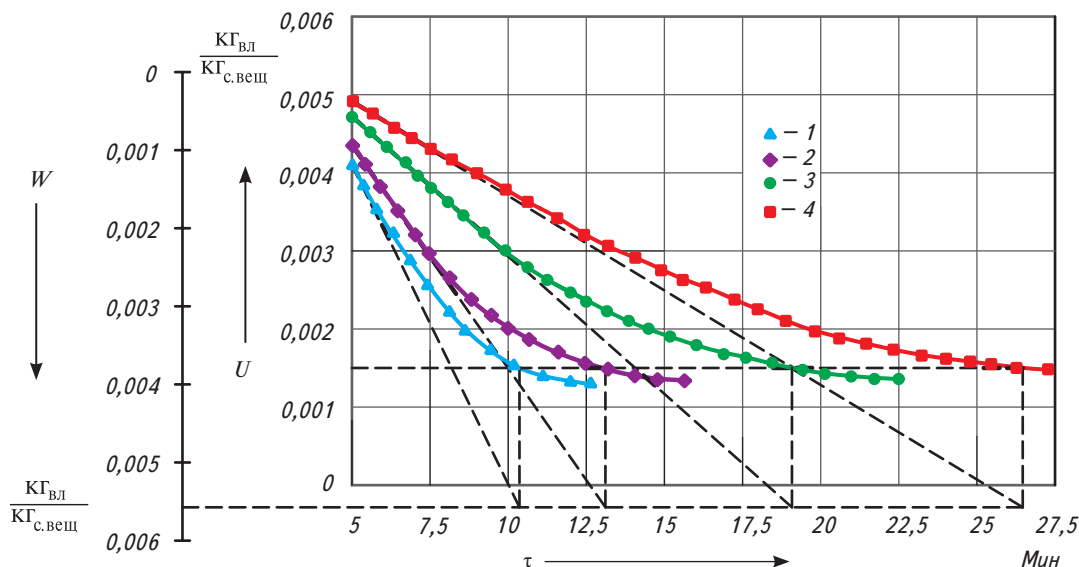


Рис. 1. Определение общего эквивалентного влагосодержания при вакуумной сушке сахара: 1 – $T = 333 \text{ K}$; 2 – $T = 323 \text{ K}$; 3 – $T = 313 \text{ K}$; 4 – $T = 303 \text{ K}$

с которым площадь поверхности кристалла сахара определяется как площадь сферической частицы, обладающей такой же массой, как и исходная частица неправильной формы. Приняв частицу сахара за форму шара с радиусом R_n , имеем её поверхность

$$S=4\pi R^2, \text{ а объём } - V_{\text{ч}} = \frac{4}{3}\pi R_n^3.$$

Функция изменения поверхности слоя шаровых частиц определяется из формулы

$$F(U) = 4\pi R_n^2 \cdot \left(\frac{U}{U_{\text{кр}}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot N_{\text{ч}}, \quad (3)$$

где $N_{\text{ч}}$ – количество частиц сахара в слое, шт.

Анализ кинетики сушки сахара (см. рис. 1) показывает наличие постоянной и убывающей скорости сушки. По аналогии между химическими реакциями в процессе сушки сахара можно отметить, что она подобна гетерогенной химической реакции с твёрдой фазой и образованием газообразной фазы продуктов реакции, в которой можно выделить две стадии при постоянной и убывающей скоростях.

Сушка сахара осуществляется в вакуумной камере. Из этого следует, что уравнение скорости первого периода не должно содержать никаких коэффициентов, учитывающих влияние скорости сушильного агента на скорость испарения свободной поверхностной влаги [9]. Тепловой поток к сахару подводится инфракрасным излучением. В сушильной камере создаётся разрежение.

Тогда согласно методике моделирования сушки на основе законов химической кинетики [10] и с учётом свойств сахара, видов связи влаги в них [8] кинетика сушки в первом периоде может быть описана уравнением

$$N_1 = -\frac{dU}{d\tau} = U_{\text{н}} \cdot A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT_1}\right), \quad (4)$$

где N_1 – постоянная (максимальная) скорость первого периода, мин^{-1} ; τ – продолжительность сушки, мин; $U_{\text{н}}$ – начальное влагосодержание продукта, $\text{кг}_{\text{вл}}/\text{кг}_{\text{с.вещ}}$; T_1 – температура материала в первом периоде сушки, К.

Во втором периоде убывающая скорость сушки будет определяться по уравнению

$$N_2(U) = -\frac{dU}{d\tau} = N_1 \left(\frac{U}{U_{\text{кр}}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{U}{U_{\text{кр}}}\right)^n \times \exp\left[-\frac{A_{\text{ф}}}{RT} \cdot \exp(-B_{\text{ф}} \cdot U)\right], \quad (5)$$

где $N_2(U)$ – скорость сушки во втором периоде, мин^{-1} ; $U_{\text{кр}}$ – критическое влагосодержание продукта, $\text{кг}_{\text{вл}}/\text{кг}_{\text{с.вещ}}$.

Температура сахара в первом периоде будет определяться по уравнению

$$T_1 = T_{\text{м}} + a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad (6)$$

где $a_0, a, a_2, \dots, a_n$ – эмпирические коэффициенты; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – факторы процесса.

Во втором – по уравнению

$$T = T_{\text{кр}} + (T_{\text{к}} - T_{\text{кр}}) \times \frac{\frac{1}{m} \left\{ \exp[m(U_{\text{кр}} - U)] - 1 \right\} - (U_{\text{кр}} - U)}{\frac{1}{m} \left\{ \exp[m(U_{\text{кр}} - U_{\text{р}})] - 1 \right\} - (U_{\text{кр}} - U_{\text{р}})}, \quad (7)$$

где $T_{\text{кр}}$ – температура материала при достижении критического влагосодержания, К; $T_{\text{к}}$ – температура материала при достижении равновесного влагосодержания, К; $U_{\text{р}}$ – равновесное влагосодержание, $\text{кг}_{\text{вл}}/\text{кг}_{\text{с.вещ}}$; m – эмпирический коэффициент, независимый от режима сушки.

Используя уравнения (4), (5) и применяя численные методы, несложно вычислить на компьютере продолжительность сушки.

Продолжительность сушки второго периода также можно уточнить на основе установления экспериментальных зависимостей через эквивалентное влагосодержание [6, 9] (см. рис. 1).

Расчётное уравнение продолжительности сушки можно записать в виде

$$\tau_c = \frac{U_{\text{н}} - U_{\text{кр}}}{N_1} + \int_{U_{\text{кр}}}^{U_{\text{р}}} -\frac{dU}{N_1 \psi(u)}, \quad (8)$$

откуда

$$N_1 \cdot \tau_c = U_{\text{н}} - U_{\text{кр}} + \int_{U_{\text{кр}}}^{U_{\text{р}}} \frac{dU}{\Psi(U)} = W_{\text{об}}, \quad (9)$$

где $W_{\text{об}}$ – общее эквивалентное влагосодержание продукта, $\text{кг}_{\text{вл}}/\text{кг}_{\text{с.вещ}}$; $\Psi(U) = N_2(U)/N_1$. Таким образом, предоставляется достаточно простой путь определения τ_c на основе установления экспериментальным путём зависимости в виде

$$N_1 \cdot \tau_c = W_{\text{об}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10)$$

где $W_{\text{об}}$ – общее эквивалентное влагосодержание продукта, $\text{кг}_{\text{вл}}/\text{кг}_{\text{с.вещ}}$; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – факторы, влияющие на скорость сушки.

Эквивалентное влагосодержание сахара определяли графическим методом. Для этого на графике (см. рис. 1) экспериментальных кривых сушки указана дополнительная ось эквивалентного влагосодержания W , параллельная и противоположная направлению оси U . Точка 0 на оси W совпадает с $U_{\text{н}}$ на оси U . Масштабы осей W и U совпадают. Из точки на кривой сушки, соответствующей $U_{\text{к}}$, проводится вертикальная линия вниз до пересечения прямой, проведённой через участок кривой сушки, соответствующей

щей скорости первого периода. Полученная таким образом точка указывает на оси W величину общего эквивалентного влагосодержания.

Количество теплоты, затраченное непосредственно на удаление влаги из сахара, можно определить на основании энергетического баланса по уравнению [7]:

$$dE_{\text{полн}} = C_c \cdot dT + C_{\text{вл}} \cdot dT[U(\tau) - dU] + dU \cdot i''(T) + \frac{A_\phi}{18} \cdot \exp(-B_\phi \cdot U(\tau)) \cdot dU, \quad (11)$$

где C_c , $C_{\text{вл}}$ – теплоёмкость сухого продукта и влаги, Дж/(кг·К); $U(\tau)$ – влагосодержание продукта в момент времени τ , кг_{вл}/кг_{с.вещ}; $i''(T)$ – энтальпия сухого насыщенного водяного пара при температуре $T(\tau)$, кДж/кг; R – универсальная газовая постоянная, кДж/(кмоль·К); A_ϕ , B_ϕ – эмпирические коэффициенты уравнения $\phi(U, T)$.

Для этого используем экспериментальные данные: кривые сушки (см. рис. 1), температурные кривые (см. рис. 2), термодинамические таблицы насыщенного водяного пара, уравнение кривой сорбции сахара [8], табличные значения теплоёмкости воды и сухой части сахара. Кривые сушки и температурные кривые разделяем на небольшие интервалы влагосодержания ΔU_i и соответствующие им интервалы температуры ΔT_i , определяем среднее значение влагосодержания $U(\tau)$ и температуры $T(\tau)$ в каждом интервале ΔU_i и ΔT_i . Заменяем знак дифференциала в уравнении (11) на Δi и вычисляем для каждого интервала значение $\Delta E(U)_{i\text{полн}}$. Определяем значение $E_{\text{полн}}(U_n, U)$ при высушивании сахара от U_n до U :

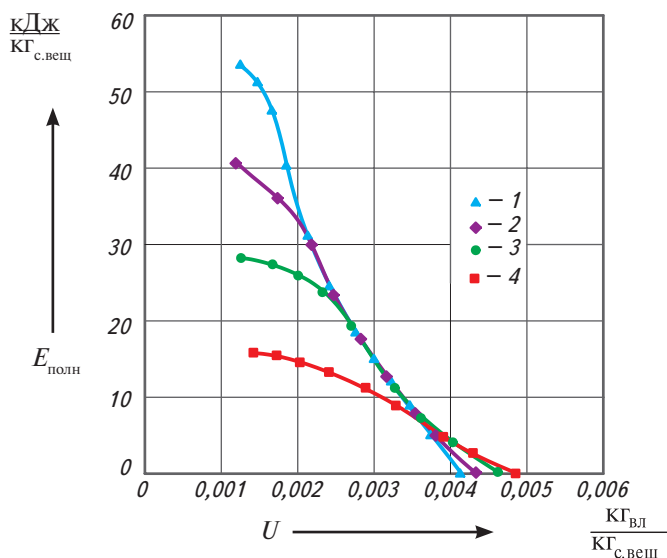


Рис. 3. Зависимость энергии, затраченной на удаление влаги в процессе вакуумной сушки сахара: 1 – $T = 333$ К; 2 – $T = 323$ К; 3 – $T = 313$ К; 4 – $T = 333$ К

$$E_{\text{полн}}(U_n, U) = \sum_{i=1}^k \Delta E(U)_{i\text{полн}}, \quad (12)$$

где j – количество интервалов на кривых $U = f_1(\tau)$, $T = f_1(\tau)$; $U = U_n - \sum_{i=1}^k \Delta U_i$.

Результаты расчёта $E_{\text{полн}} = E_{\text{полн}}(U)$ для сахара вакуумной сушки с температурами 303, 313, 323 и 333 К показаны на рис. 3.

Полученные данные для сахара при различных режимах вакуумной сушки были обработаны в координатах

$$\frac{U_n - U}{U_n - U_p} - \frac{E(U_n, U)}{E(U_n, U_p)}.$$

Результаты обобщения указанных кривых приведены на рис. 4, они подтверждают правомочность гипотезы, что для всего периода сушки степень сушки есть функция степени поглощения энергии, при этом указанная функция инвариантна к любому режиму сушки [7].

Заключение

Сушка сахара может быть рассмотрена с позиции физической химии как квазитопохимическая гетерогенная реакция. Её математическое моделирование может быть основано на законах химической кинетики.

Показано практическое применение методологии моделирования сушки на основе законов химической кинетики гетерогенных процессов к моделированию вакуумной сушки сахара.

Разработана математическая модель на основе законов кинетики гетерогенных химических процессов вакуумной сушки сахара, учитывающая форму продукта и температуру сушки.

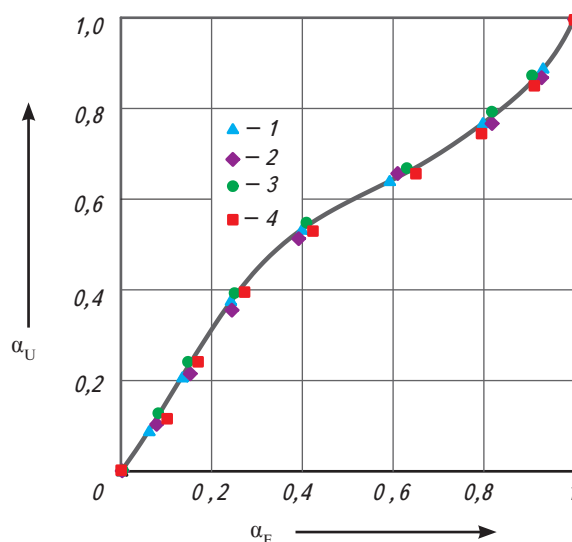


Рис. 4. Зависимость степени сушки от степени поглощения энергии при вакуумной сушке сахара: 1 – $T = 333$ К; 2 – $T = 323$ К; 3 – $T = 313$ К; 4 – $T = 333$ К

Полученная математическая модель процесса вакуумной сушки сахара надёжно описывает процесс при остаточном давлении 4–6 кПа и температуре продукта от 313 до 333 К. Данная математическая модель не имеет принципиальных ограничений при использовании её в более широких диапазонах значений остаточного давления и температуры.

Установлено, что кинетику вакуумной сушки сахара с инфракрасными источниками излучения целесообразно характеризовать зависимостью степени сушки от степени поглощённой энергии. На основании энергетического баланса определено количество энергии, поглощённой в процессе сушки сахара.

Список литературы

1. Разработка технологических режимов сушки сахара при пониженном давлении / В.А. Ермолаев, А.А. Славянский, Д.Е. Фёдоров [и др.] // Сахар. — 2021. — № 10. — С. 32–35.
2. Славянский, А.А. Промышленное производство сахара / А.А. Славянский. — М.: РУСАЙНС, 2021. — 396 с.
3. Кристаллизация сахарозы как диффузионный процесс / Е.В. Семёнов, А.А. Славянский, М.Б. Мойсеяк [и др.] // Сахар. — 2003. — № 1. — С. 48–51.
4. Славянский, А.А. Пути повышения качества и выхода сахара-песка / А.А. Славянский, А.Р. Сапронов // Международный сельскохозяйственный журнал. — 1988. — № 6. — С. 75–80.
5. ГОСТ 33222-2015. Сахар белый. Технические условия. — М.: Стандартинформ, 2019. — 16 с.
6. Antipov, S.T. Kinetics laws as the base for mathematical simulation of microwave vacuum drying process / S.T. Antipov, V.M. Arapov, D.A. Kazartsev // Journal of Physics: Conference Series. Ser. «International Interdisciplinary Scientific Conference «Advanced Element Base of Micro- and Nano-Electronics». — 2020. — P. 012–017.
7. Modelling the drying process in case of combined energy supply / S.T. Antipov, V.M. Arapov, D.A. Kazartsev, M.V. Babaeva // Journal of Physics: Conference Series. 23. Ser. «XXIII International Conference on Soft Computing and Measurement, SCM 2020». — 2020. — P. 012–020.
8. Тарасова, Е.А. Температурно-влажностный режим хранения — важный фактор сохранности сахара белого / Е.А. Тарасова, К.Б. Гурьева // Сахар. — 2022. — № 1. — С. 38–42.
9. Казарцев, Д.А. Разработка общих видов математических моделей сушки пищевых продуктов с СВЧ-энергоподводом на основе законов химической кинетики гетерогенных процессов / Д.А. Казарцев // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. — 2021. — Т. 83. — № 3. — С. 17–22.
10. Drying process simulation methodology based on chemical kinetics laws / V.M. Arapov, D.A. Kazartsev, I.A. Nikitin [et al.] // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. — 2020. — Т. 11. — № 2. — PP. 17–22.
11. Ермолаев, В.А. Теоретическое обоснование и практическая реализация технологии сухого сырного продукта: специальность 05.18.04 «Технология мясных, молочных и рыбных продуктов и холодильных производств»: дисс. ... д-ра техн. наук / Ермолаев Владимир Александрович; ФГБОУ «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности». — Кемерово, 2013. — 466 с.
12. Ермолаев, В.А. Определение температур вакуумной сушки твёрдых сыров / В.А. Ермолаев, А.Н. Расщепкин // Сыроделие и маслоделие. — 2009. — № 4. — С. 44–45.
13. Патент № 2462867С1 Российская Федерация МПК В7/02. Способ вакуумной сушки ягод : № 2011122882 : заявл. 06.06.2011 : опубл. 10.10.2012 : бюл. № 28 / Ермолаев В.А., Фёдоров Д.Е., Масленникова Г.А. : заявитель ГОУ ВПО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности». — 5 с.

Аннотация. Статья посвящена моделированию вакуумной сушки кристаллов сахара на основе законов химической кинетики гетерогенных процессов. Предложено рассматривать вакуумную сушку сахара с позиции физической химии как квазитопохимическую гетерогенную реакцию и выполнять математическое моделирование данного процесса на основе законов химической кинетики гетерогенных процессов. Показана практическая реализация методологии моделирования сушки на основе законов химической кинетики гетерогенных процессов при моделировании вакуумной сушки сахара. Рекомендуется продолжительность сушки второго периода вычислять на основе установления экспериментальных зависимостей через эквивалентное влагосодержание. Показана целесообразность характеризовать кинетику вакуумной сушки сахара зависимостью степени сушки от степени поглощённой энергии. Подтверждена научная гипотеза: обобщённая характеристика кинетики сушки – зависимость степени сушки от степени поглощённой энергии продуктом, не зависит от параметров, характеризующих режим сушки. Предложенная модель позволяет надёжно прогнозировать процесс вакуумной сушки сахара, определять количество энергии поглощённой непосредственно в процессе сушки и может быть положена в основу оптимизации и управления процессом.

Ключевые слова: сахар, вакуум, давление, температура, сушка, моделирование, химическая кинетика.

Summary. The article is devoted to modeling the vacuum drying of sugar crystals based on the laws of chemical kinetics of heterogeneous processes. It is proposed to consider the vacuum drying of sugar from the standpoint of physical chemistry as a quasi-topochemical heterogeneous reaction and to perform mathematical modeling of this process based on the laws of chemical kinetics of heterogeneous processes. The practical implementation of the drying simulation methodology based on the laws of chemical kinetics of heterogeneous processes in the simulation of vacuum drying of sugar is shown. It is proposed to calculate the duration of drying of the second period on the basis of establishing experimental dependencies through the equivalent moisture content. The expediency of characterizing the kinetics of vacuum drying of sugar by the dependence of the degree of drying on the degree of absorbed energy is shown. A scientific hypothesis has been confirmed: a generalized characteristic, drying kinetics – the dependence of the degree of drying on the degree of energy absorbed by the product, does not depend on the parameters characterizing the drying mode. The proposed model allows you to reliably predict the process of vacuum drying of sugar, determine the amount of energy absorbed directly in the drying process and can be used as the basis for optimizing and controlling the process.

Keywords: sugar, vacuum, pressure, temperature, drying, modeling, chemical kinetics.